Lagebeziehung Parabel - Parabel
Übung

1. Ermitteln Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte zwischen den Funktionen f_1 und f_2. Geben Sie gegebenenfalls jeweils die Lage und die Art dieser Punkte (Schnitt- oder Berührpunkt) mit an. •◦◦

   a) $f_1(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 1)$ und $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 1$

   b) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

   c) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und $f_2(x) = -x^2 + 6x - 5$

   d) $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ und $f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

   e) $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x-5)$ und $f_2(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + \frac{4}{3}$

   f) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ und $f_2(x) = -(x^2 + 4x + 1)$

2. Bestimmen Sie die Terme zweier beliebiger quadratischer Funktionen, deren Graphen sich nur im Punkt $P(1; 4)$ schneiden! ••◦

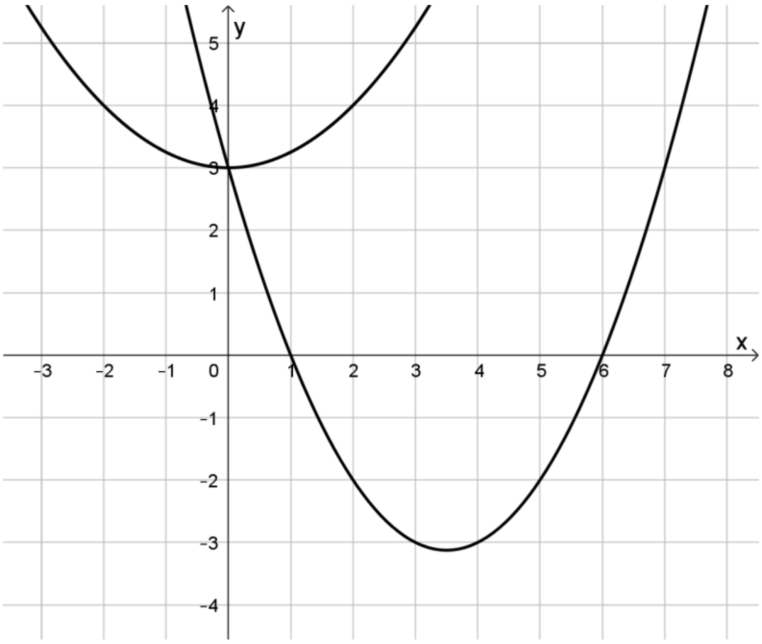
3.
   a) Erläutern Sie folgende Rechnung. Interpretieren Sie das Rechenergebnis. ••◦

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x \\
&\frac{3}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \\
&3x^2 - 6x + 8 = 0 \\
&D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = -60
\end{aligned}
$$

   b) Was könnte in der obersten Zeile der Rechnung geändert werden, damit sich zwei Schnittpunkte ergeben?

4. Bestimmen Sie den Term einer quadratischen Funktion $f_2(x)$, deren Graph den Graphen der Normalparabel $f_1(x) = x^2$ an der Stelle $x_1 = 2$ berührt. •••

5. Die beiden abgebildeten Graphen schneiden sich im Punkt $S_1(0; 3)$. Berechnen Sie die Koordinaten des weiteren Schnittpunkts. •••



6. Gegeben sind die Parabelgleichungen $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}(\mathrm{x}+1)^2 - 1$ und $\mathrm{g(x)} = -\frac{1}{2}(\mathrm{x}-3)^2 + 7$. ••◦

   a) Geben Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte beider Parabeln an.

   b) Weisen Sie nach, dass sich beide Parabeln in ihren Scheitelpunkten schneiden.

7. Begründen Sie anschaulich und ohne Rechnung, dass sich die Graphen von $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}-1)^2 + 2$ und $\mathrm{g(x)} = -2(\mathrm{x}-1)^2 + 2$ in einem Punkt berühren. Geben sie die Koordinaten des Berührpunkts an. ••◦

8. Betrachtet werden die Parabeln mit den Gleichungen $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 10$ und $\mathrm{g(x)} = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 8$. Weisen Sie nach, dass sich die Parabeln im Punkt $\mathrm{B}(6; 22)$ berühren. ••◦

Lagebeziehung Parabel - Parabel
Lösung

1.
   a) $S_1(1; 0)$, $S_2(3; 1)$ zwei Schnittpunkte
   b) kein gemeinsamer Punkt
   c) $B(2; 3)$ Berührpunkt
   d) $S(-3; -2)$ Schnittpunkt
   e) Die Parabeln sind identisch, jeder der unendlich vielen Punkte sind gemeinsame Punkte
   f) kein gemeinsamer Punkt

2. Für diese Aufgabe existieren beliebig viele Lösungen. Damit nur ein Schnittpunk existiert, müssen beide Funktionen denselben Formfaktor a besitzen, z.B. $a = 1$. Nun muss nur noch sichergestellt werden, dass $P(1; 4)$ enthalten ist. Beispiele sind die beiden Funktionen $f_1(x) = x^2 + 3$ und $f_2(x) = x^2 + x + 2$.

3.
   a) Die gemeinsamen Punkte der Graphen von $f_1(x) = x^2 - 2x + 4$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ werden berechnet. Da die Diskriminante einen negativen Wert von -60 besitzt, existieren keine gemeinsamen Punkte.
   b) Die linke Funktion könnte auf $f_1(x) = x^2 - 2x$ geändert werden (Verschieben des Graphen um 4 in negative y-Richtung).

4. Durch Rückwärts rechnen der Gleichung $(x-2)^2 = 0$ oder sinnvolles Probieren erhält man eine der unendlich vielen Lösungen wie z.B. $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 4$ oder $f_2(x) = -(x-4)^2 + 8$.

5. Die beiden Funktionsterme lauten $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-6)$. Gleichsetzen liefert den bereits sichtbaren Schnittpunkt $S_1(0; 3)$ sowie $S_2(14; 52)$.

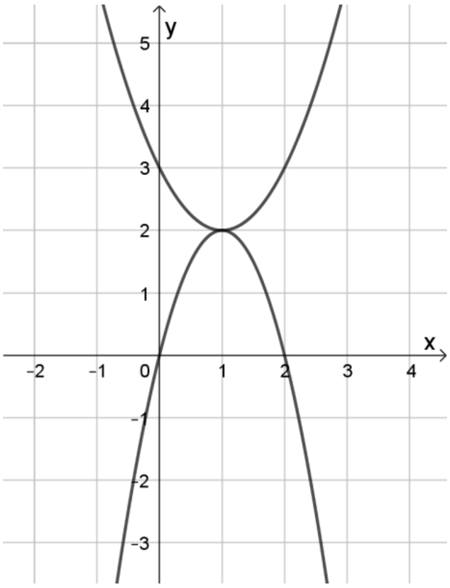
6.
   a) Die Koordinaten der Scheitelpunkte lauten $S_f(-1; -1)$ und $S_g(3; 7)$.

   b) Da die beiden Funktionen ungleichen Formfaktor besitzen, können sie nicht identisch sein. Daher genügt zu zeigen, dass die Scheitelpunkte auf dem jeweils anderem Funktionsgraphen liegen.

   $f(3) = \frac{1}{2}(3+1)^2 - 1 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 1 = 7$ und
   $g(-1) = -\frac{1}{2}(-1-3)^2 + 7 = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 7 = -1$

   Natürlich können Sie auch die aufwändigere Methode mit dem Gleichsetzen verwenden.

7. Der gemeinsame Scheitelpunkt muss der Berührpunkt $B(1; 2)$ sein.



8. Es genügt nicht zu zeigen, dass beide Graphen durch den Punkt B verlaufen. Der Beweis, dass die Graphen im Berührpunkt dieselbe Steigung besitzen, kann z.B. durch Gleichsetzen erbracht werden. Die Diskriminante der entstehenden Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 = 0$$

besitzt dann den Wert $D = (-6)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 = 0$.